10回目

2020年7月1日 10:20

Lie微分

- $\varphi : M \to N$ 微分同相 (diffeo)

- M上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して N上のベクトル場

  $\mathfrak{X}(M)$：C^∞級ベクトル場の集合

  $\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ を次のように対応させる

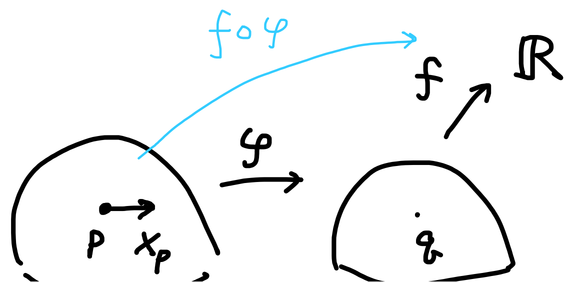
  $\varphi_* X$：押し出し (push-forward)

$$(\varphi_* X)_q := d_p\varphi(X_p) \in T_qN \qquad \text{但し} \begin{cases} q \in N \\ p = \varphi^{-1}(q) \in M \end{cases}$$

$d_p\varphi : T_pM \to T_qN$, $X_p \in T_pM$

[これが C^∞級ベクトル場になることは演習]

- $\varphi_* X$ の関数 $f \in C^\infty(N)$ への作用



$$(\varphi_* X)(f) = (d_p\varphi(X_p))(f)$$

$$= X_p(f\circ\varphi)$$

$$= \bigl(X(f\circ\varphi)\bigr)(p) = \bigl(X(f\circ\varphi)\bigr)(\varphi^{-1}(q))$$

つまり $(\varphi_* X)(f) = \bigl(X(f\circ\varphi)\bigr)\circ\varphi^{-1}$

- 関数の引き戻し $\varphi^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M)$

$$f \longmapsto f\circ\varphi = \varphi^* f \quad \text{とかく}$$

これは φ が diffeo でなくても 一般の C^∞ map $M\to N$ で OK.

上の関係は次の可換図式で書ける

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(N) \arrow[r, "\varphi^*", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi_* X"'] & C^\infty(M) \arrow[d, "X"] \\
C^\infty(N) \arrow[r, "\varphi^*", "\cong"'] & C^\infty(M)
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_* X = (\varphi^*)^{-1}\circ X\circ\varphi^*$$

注 下つきの $*$ ： もとの写像と同じ向きの操作 （押し出し） push-forward

上つきの $*$ ： 〃 と逆向きの操作 （引き戻し） pull-back

注 φ が一般の C^∞ map $\varphi: M \to N$ のとき

M 上のベクトル場 X は必ずしも φ で"押し出せない"

一方で $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が「φ で関係する」

ことはありうる $\boxed{\forall p \in M \text{ に対して } \quad d_p\varphi(X_p) = Y_{\varphi(p)}}$

定義 （Lie微分） $X \in \mathfrak{X}(M)$ $\varphi_t : X$ の flow （局所的）

t=0の近傍で定義されている

① $f \in C^\infty(M)$ に対して

$\begin{cases} \cdot \ \varphi_0(x) = x \\ \cdot \ t \mapsto \varphi_t(x) \text{ は } x \text{ を通る } X \text{ の} \end{cases}$

積分曲線

$$\mathcal{L}_X f := \frac{d}{dt} \varphi_t^* f \Big|_{t=0}$$

φ_t は diffeo

$\varphi_t : M \to M$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t}$$

パラメータ

t に滑らかに依存する

M 上のベクトル場

② $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \overbrace{(\varphi_{-t})_* Y}^{} \Big|_{t=0}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

$\mathcal{L}_X f$, $\mathcal{L}_X Y$ を Lie 微分という. (もっと一般のテンソル場で定義される)

定理

① $\mathcal{L}_X f = X(f)$

② $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

∵

①
$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* f)(p)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} f(\underbrace{\varphi_t(p)}_{\text{t=0での速度が } X_p \text{ にひとしい曲線}})\Big|_{t=0}$$

$$= X_p(f) = X(f)(p)$$

②
$$(\mathcal{L}_X Y)(\underbrace{f}_{C^\infty(M)}) = \frac{d}{dt}\Big((\varphi_{-t})_* Y\Big)(f)\Big|_{t=0}$$

上の可換図式

$$= \frac{d}{dt}\Big((\varphi_{-t}^*)^{-1}\, Y\, \varphi_{-t}^*(f)\Big)\Big|_{t=0}$$

$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ ゆえ $(\varphi_{-t}^*)^{-1} = \varphi_t^*$ であることが分かり

$$= \frac{d}{dt}\left(\varphi_t^* Y \varphi_{-t}^*(f)\right)\Big|_{t=0}$$

$\left(\varphi_t^* Y \varphi_s^*(f)\right)(p)$

は (t, s, p) の C^∞ 級関数

$\cap$

$\mathbb{R}^2 \times M$

$$= \frac{d}{dt}\varphi_t^* Y(f)\Big|_{t=0} - \frac{d}{dt} Y \varphi_t^* f\Big|_{t=0}$$

$$= X(Y(f)) - Y(X(f))$$

のより

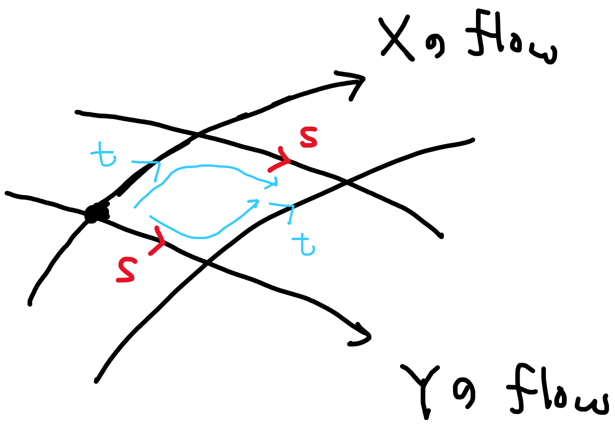
$$= [X, Y](f)$$

//

<u>応用</u> $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ・完備

$[X, Y] = 0$ ならば X の flow $\{\varphi_t\}$ と Y の flow $\{\psi_t\}$

は 互いに交換する　　$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \quad (\forall s, \forall t)$



∵　$\psi_s = \varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t$ を示せばよい

つまり　$s \longmapsto (\varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t)(x)$

が x を初期値とする Y の積分曲線

であることを示す

• $s = 0$ のとき　$(\varphi_t^{-1} \circ \underbrace{\psi_0}_{= \mathrm{id}} \circ \varphi_t)(x) = (\varphi_t^{-1} \circ \varphi_t)(x) = x$

[$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ に注意]

• $\dfrac{d}{ds} \underline{\varphi_t^{-1} \circ \psi_s \circ \varphi_t \ (x)} = \dfrac{d}{ds} \varphi_{-t}\left(\psi_s(\varphi_t(x)) \right)$

パラメータ s について Y の積分曲線

で 速度は $Y_{\psi_s(\varphi_t(x))}$

$$= d_{\psi_s(\varphi_t(x))}\varphi_{-t}\left(Y_{\psi_s(\varphi_t(x))}\right)$$

$$= \Big[\underbrace{(\varphi_{-t})_* Y}_{\overset{?}{=}\,Y}\Big]_{\varphi_{-t}(\psi_s(\varphi_t(x)))}$$

Y であればよい

・一方で

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_* Y = \frac{d}{ds}(\varphi_{-t-s})_* Y \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds}(\varphi_{-t})_*(\varphi_{-s})_* Y\Big|_{s=0}$$

$$= (\varphi_{-t})_* \mathcal{L}_X Y$$

- $\varphi_{-t-s} = \varphi_{-t}\circ\varphi_{-s}$
- $(\varphi_1\circ\varphi_2)_* = \varphi_{1*}\circ\varphi_{2*}$

φ_i diffeo

$$= (\varphi_{-t})_* [X, Y] = 0$$

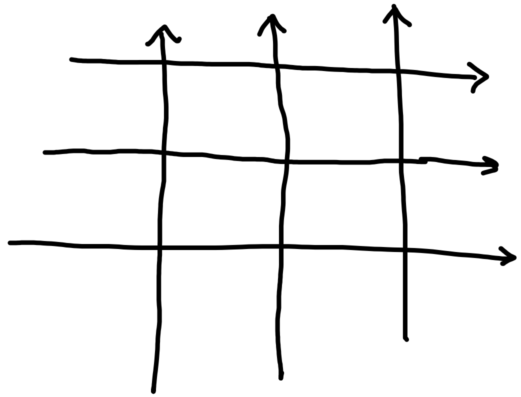
より $(\varphi_{-t})_* Y = (\varphi_0)_* Y = Y$ //

注 逆も正しい (flow が交換 $\Rightarrow$ $[X, Y] = 0$ もいえる)

例 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial y}$ $\rightsquigarrow$ $[X, Y] = 0$

$\rotatebox{90}{$\in$}$
(x, y)

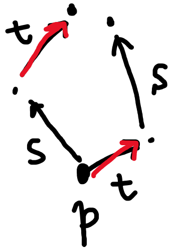
$$\begin{cases} X \text{ の flow } & \varphi_t(x, y) = (x+t, y) \\ Y \text{ の flow } & \psi_t(x, y) = (x, y+t) \end{cases}$$



注 $[X, Y] \neq 0$ のとき s, t が微小のとき

$$\psi_s \circ \varphi_t - \varphi_t \circ \psi_s \sim st [X, Y]$$

$\varphi_s \circ \psi_t - \psi_t \circ \varphi_s \sim st\,[X, Y]$



(座標表示したときにこの近似式が成立する)

$[X, Y]$ は flow が交換しない度合いを与える

余接空間　(cotangent space)

T_pM : 接空間　$(p \in M)$　← $\mathbb{R}$ベクトル空間

$$
\begin{aligned}
T_p^*M &= T_pM \text{ の双対空間} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{R}) \\
&= \{\, \alpha : T_pM \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ は } \mathbb{R}\text{線形} \,\}
\end{aligned}
$$

余接空間

を余接空間という

$T_p^* M$ の元を余接ベクトルという (cotangent vector)

例 f 点 p のまわりの C^∞ 級関数

$$d_p f : T_p M \longrightarrow \underset{\sim\sim\sim}{T_{f(p)}\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$$ は余接ベクトル

$\| \; (df)_p$ ともかく

$X \in T_p M$ に対して $\boxed{d_p f(X) = X(f)}$

∵ x $\mathbb{R}$ の座標

$$(d_p f(X))(x) = X(x \circ f) = X(f)$$

より $d_p f(X) = \underline{X(f)}\dfrac{\partial}{\partial x}$

$(x_1, \cdots, x_m)$: Mの局所座標

<u>命題</u> $(dx_1)_p = d_p x_1, \cdots, (dx_m)_p = d_p x_m \in T_p^* M$

は $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \in T_p M$ の双対基底である.

∵ $$(dx_i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p x_i = \delta_{ij}$$

//

<u>1次微分形式</u> (differential 1-form) 単に 1-form ともいう

M上の 1-form とは Mの各点 p に対して 余接ベクトル $\alpha_p \in T_p^* M$

が与えられたもの

- 局所座標表示　$(U; x_1, \cdots, x_m)$ 上で

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{f_i(x_1(p), \cdots, x_m(p))}_{m\text{変数関数}} (dx_i)_p$$

- α が C^∞ 級 1-form $\underset{\text{def}}{\iff}$ 各 f_i が C^∞ 級関数

座標のとり方によらないこと

$(y_1, \cdots, y_m)$: 別の座標系

命題

$$(dx_i)_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) (dy_j)_p$$

∵ $(dy_1)_p, \dots, (dy_m)_p$ は T_p^*M の基底なので

$$(dx_i)_p = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (dy_j)_p$$ と展開できる

$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$ での値をみると

$$(dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p\right) = a_{ij}$$

$$\| $$

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)$$

• 命題より

$$\alpha = \sum_i f_i(x)\, dx_i \quad \leftarrow x\text{座標表示}$$

$$= \sum_{i,j} f_i(x) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial y_j}}_{C^\infty\text{級}} dy_j \quad \leftarrow y \ 〃 \ 〃$$

つまり係数関数のなめらかさは座標のとり方によらない

例

$f \in C^\infty(M)$ $\quad df :=$ 各点 p に対して 余接ベクトル d_pf $= (df)_p$ を対応させる 1-form

df は C^∞級 1-form

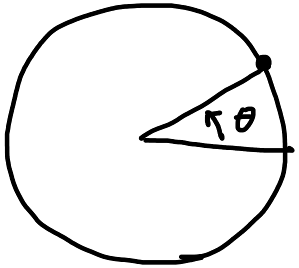
∵ $(x_1 \ldots x_m)$ 座標 $\quad d_pf\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$

$$\rightsquigarrow \quad d_pf = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)}_{C^\infty\text{級}} (dx_j)_p$$

(上の座標変換公式 の一般化)

注 $(U : x_1 \ldots x_m)$ 座標系. dx_i は U 上の C^∞級 1-form

例 $M = S^1$ 上の角度座標 θ



- $d\theta$ は S^1 上の大域的な C^∞ 級 1-form

$$d(\theta + 2\pi) = d\theta$$

- $d\theta = df$ を満たす C^∞ 級関数 f は存在しないことを示せ

$f \in C^\infty(S^1)$