1回目

2020年4月4日 18:18

教科書：松本幸夫「多様体の基礎」，松島与三「多様体入門」

おすすめ

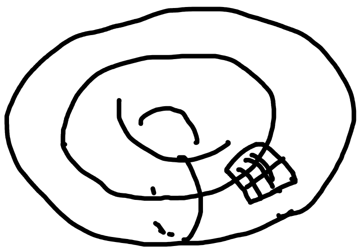
評価： レポート(+期末試験?)

予備知識：線形，微積，集合と位相

多様体とは？ 局所的に $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な位相空間.

座標がとれる

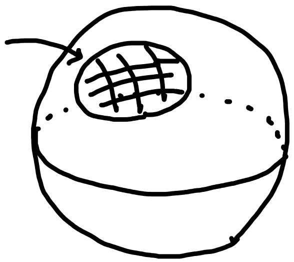
例 トーラス T^2 (ドーナツの表面)



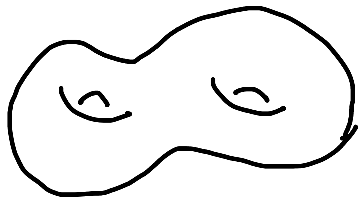
例 $S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

(2次元)球面

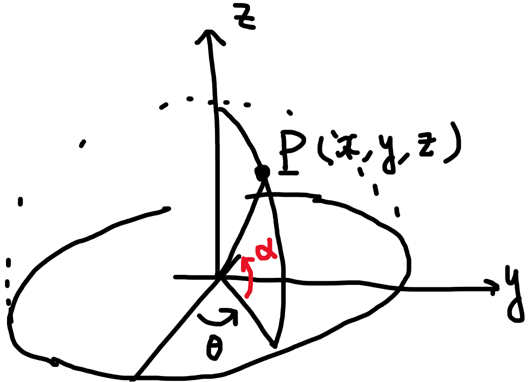
$\mathbb{R}^2$ の open set と 同相



例 種数2の曲面(二人乗りの浮き輪の表面)



S^2 の座標の例

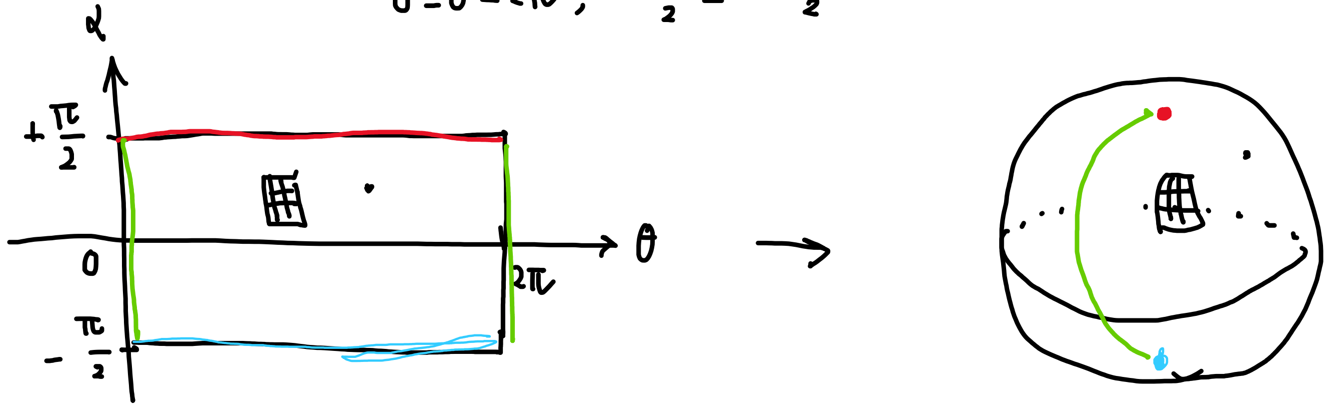


$$\left.\begin{array}{l}\theta：経度\\ \alpha：緯度\end{array}\right\}\ 座標$$

$$\begin{cases} x = \cos\alpha\cos\theta \\ y = \cos\alpha\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \sin\alpha \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

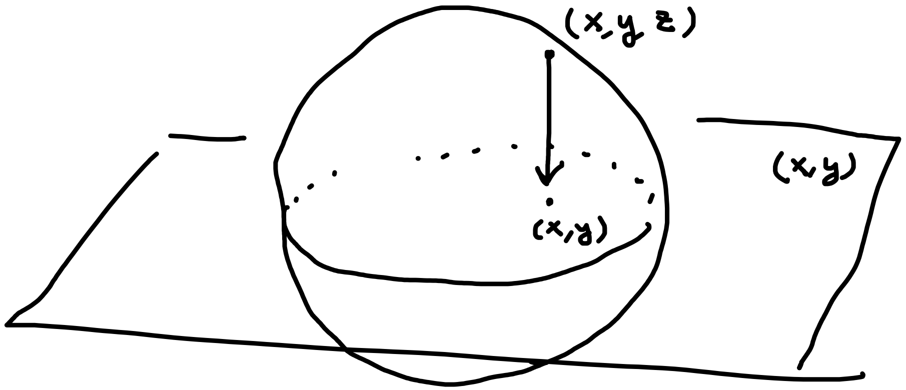


北極，南極の近くでは一対一の良い座標になっていない.

北半球上の座標

(z>0 に制限)

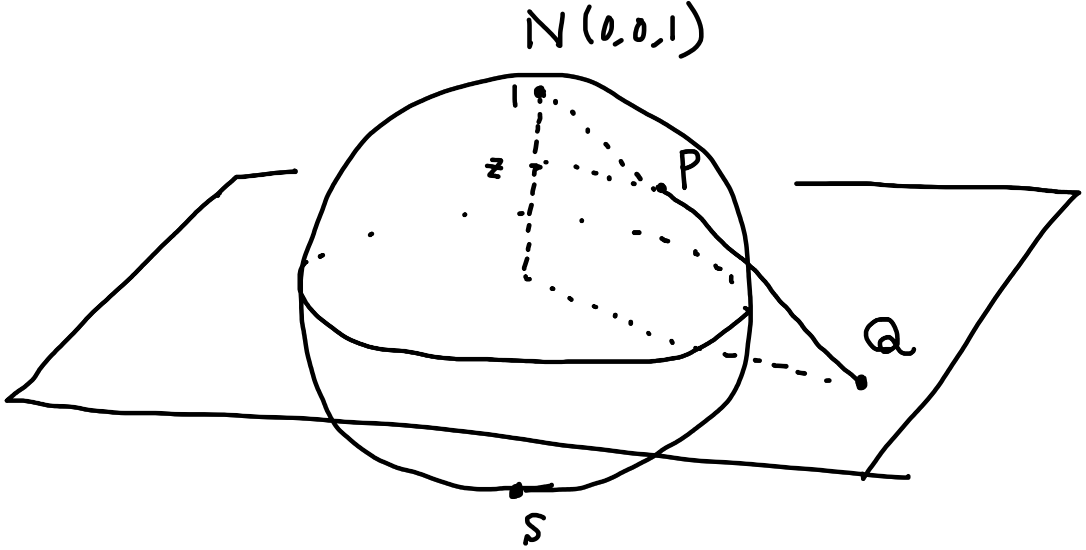
(x,y) 平面への射影により座標を入れる.



$$S^2 \cap \{z>0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

逆写像は $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \longleftarrow (x,y)$

立体射影(stereographic projection)



$P \in S \setminus \{N\}$

Q : NPと (x,y)平面の交わり

$P(x,y,z)$

$Q\left(\dfrac{x}{1-z},\ \dfrac{y}{1-z}\right)$

$$\begin{array}{ccc} S^2\setminus\{N\} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ P & \longmapsto & Q \end{array}$$

演習問題：この写像の逆写像を求めよ．また同相写像であることを示せ.

(南極からの立体射影も同様に定義できます．)

位相空間の復習

・$\mathbb{R}^n$の位相： $A \subset \mathbb{R}^n$ が open set（開集合）

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall p \in A \quad {}^\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B_\varepsilon(p) \subset A$$

但し $B_\varepsilon(p) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x-p| < \varepsilon \}$

（p中心 半径εの球体）

- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$　　$\mathcal{O}$: X の open set の あつまり

$\mathcal{O} \subset P(X)$　　いくつかの性質をもつ

- <u>相対位相</u>　$(X, \mathcal{O}_X)$ 位相空間, $A \subset X$ 部分集合

$$\mathcal{O}_A = \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}$$

は A の位相を定める. 相対位相という.

- $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$: 位相空間

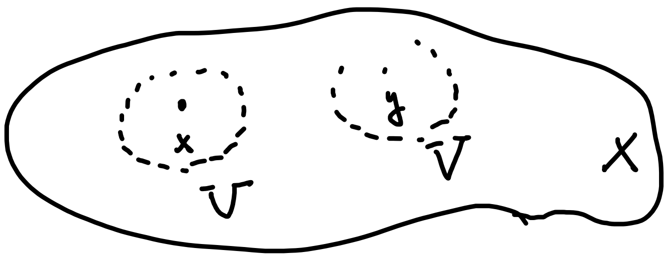
$f : X \to Y$ が 連続 $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\iff}}$ $\forall U \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$

$f : X \to Y$ が 同相 (homeomorphism)

$\underset{\text{def.}}{\iff}$ f は全単射で, f と f^{-1} が共に連続

- <u>ハウスドルフ性</u>

$(X, \mathcal{O}_X)$ が ハウスドルフ(Hausdorff) $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall x, y \in X$ に対して $x \neq y$ ならば



$\exists U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して

$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

• 積位相 : 復習して下さい

多様体の定義

$\mathbb{R}^m$ には上の位相を入れておく

定義 位相空間 X の open set U から $\mathbb{R}^m$ の open set U' への同相写像

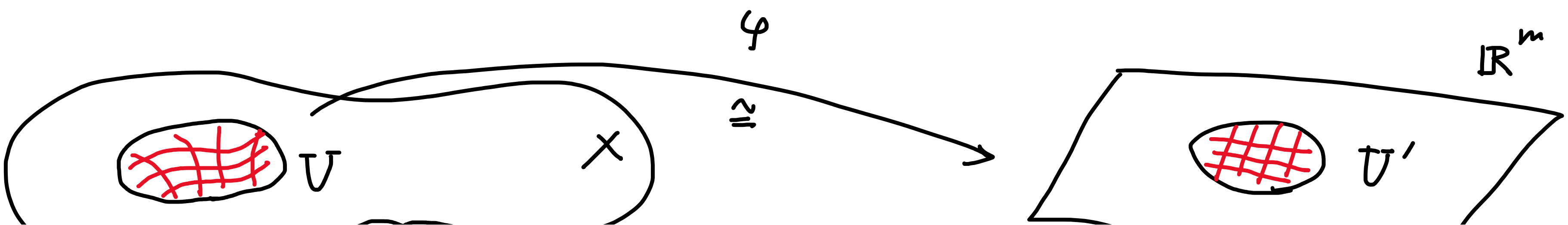
$$\begin{array}{ccc} \varphi : U & \longrightarrow & U' \\ \cap & & \cap \\ X & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

を局所座標という (local coordinate)

組 (U, φ) を m次元座標近傍と呼ぶ.

(coordinate neighborhood)

Local chart とも言う



$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$　　各 x_i は U 上の連続関数

(x_i を座標という)

定義：**m次元位相多様体**(topological manifold)とは位相空間 M であって

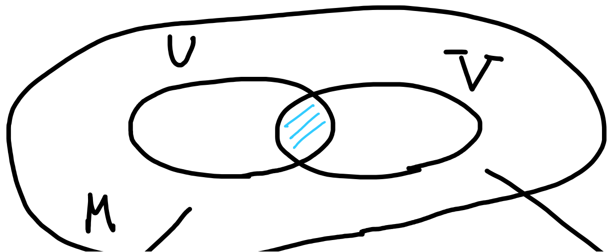
(1) M はハウスドルフ
(2) $\forall p \in M$ に対して p を含む m次元座標近傍 (U, φ) が存在する.

$$M \underset{\text{open}}{\supset} \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ p}}{U} \xrightarrow[\cong]{\varphi} U' \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$$

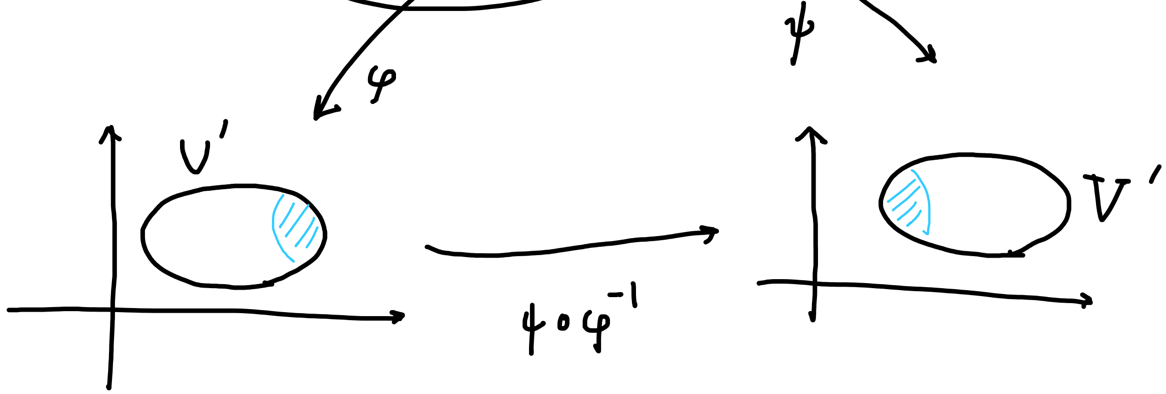
注　さらに M が第2可算 (可算な開基をもつ) と仮定することも多い.

座標変換

(U, φ), (V, ψ)　2つの chart　($U \cap V \neq \phi$ とする)



$U \cap V$ は U の open



⇝ φ は同相なので

$\varphi(U\cap V)$ は U' の open

⇝ 特に $\varphi(U\cap V)$ は $\mathbb{R}^m$ の open

(同様に $\psi(U\cap V)$ も $\mathbb{R}^m$ の open)

$$\begin{tikzcd}
\varphi(U\cap V) \arrow[rr, bend right, "\psi\circ\varphi^{-1}\text{ も同相}"'] & U\cap V \arrow[l, "\varphi", "\cong"'] \arrow[r, "\psi", "\cong"'] & \psi(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

$\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \xrightarrow{\cong} \psi(U\cap V)$

を<u>座標変換</u>という

・関数の形でかくと

$$\left.\begin{aligned}\varphi(p) &= (x_1(p), \cdots, x_m(p))\\ \psi(p) &= (y_1(p), \cdots, y_m(p))\end{aligned}\right\} \text{のとき}$$

$$(\psi\circ\varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_m) = (\tilde{y}_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, \tilde{y}_m(x_1, \cdots, x_m))$$

各 $\tilde{y}_i$ は $\varphi(U\cap V)$ 上の連続関数

$$\tilde{y}_i = y_i(\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_m))$$

注 今後は y_i と $\tilde{y}_i$ を区別しないこともあります